CARLO FELICE MANARA

Orientamenti e questioni attuali di topologia

Estratto dai
"Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano„
Vol. XXXI

1961
LIBRERIA EDITRICE POLITECNICA
TAMBURINI
MILANO

CARLO FELICE MANARA
dell' Università di Milano

Orientamenti e questioni attuali di topologia

(*Conferenza tenuta il 15 marzo 1960*) (*)

SUNTO. — Si illustrano brevemente alcune idee fondamentali della Topologia Algebrica.

1. — Questa conferenza è dedicata alla esposizione di alcuni orientamenti attuali della Topologia; in particolare si vorrebbero illustrare le tendenze formalizzatrici che hanno portato ad applicare nella Topologia alcuni concetti e metodi della Algebra, per mostrare — attraverso alcuni esempi caratteristici — la potenza e la eleganza di queste concezioni.

Trascureremo le questioni che riguardano i fondamenti e quelle che sono pertinenti alla assiomatizzazione della Topologia per rimanere nell'ambito della Topologia che per intenderci potremo indicare come « classica » perchè in certo senso generalizza quella che era la trattazione delle proprietà delle « figure » dello spazio ordinario a tre dimensioni invarianti per deformazioni continue: essendo qui il termine « figura » preso nel senso abituale ed elementare del termine.

2. — È noto che cosa si intenda per « simplesso » ad r dimensioni in uno spazio R_n ad n dimensioni (con $n \geq r$): è la figura determinata da certi $r + 1$ punti indipendenti [1] che vengono chiamati « vertici » e formata da tutti i punti dello R_n stesso che si possono considerare come baricentri di sistemi di masse (positive o nulle) concentrate nei vertici.

(*) Pervenuta in tipografia il 16 luglio 1960.

[1] Secondo l'espressione abituale si usa dire che certi $(r + 1)$ punti sono indipendenti se, presi comunque $(s + 1)$ tra di essi (con $s \leq r$) lo spazio lineare da questi determinato non contiene nessuno tra i punti rimanenti.

Esempi elementari di simplessi sono dati dal segmento, dal triangolo e dal tetraedro.

È possibile inoltre associare ad ogni simplesso due « orientazioni », l'una opposta dell'altra; quando l'una di esse venga indicata convenzionalmente come « positiva » la opposta verrà indicata come « negativa ». Pertanto indicando con $+\tau^r$ un dato simplesso ad r dimensioni con una determinata orientazione considerata come positiva, il simbolo $-\tau^r$ indica convenzionalmente lo stesso simplesso considerato con la orientazione opposta.

Il simplesso τ^r avente per vertici i punti $e_0, e_1, \ldots, e_r$ si suole indicare con il simbolo

$$(1) \qquad \tau^r \equiv (e_0, e_1, \ldots, e_r)$$

con la convenzione che lo scambio di due vertici nell'ordine di enunciazione porti ad indicare il simplesso che ha orientazione opposta di quello indicato nella (1) stessa.

Analogamente ricordiamo che si intende come « faccia » di un simplesso ad r dimensioni un simplesso τ^{r-1} ad $r-1$ dimensioni che ha per vertici soltanto r tra gli $(r+1)$ vertici del simplesso dato; pertanto un dato simplesso ad r dimensioni ammette $r+1$ faccie; la faccia del simplesso (1) che è determinata da tutti i vertici escluso il k-esimo (con $k = 0, 1, 2, \ldots, r$) si vuole indicare col simbolo

$$(2) \qquad \tau_k^{r-1} \equiv (e_0, e_1, \ldots, e_{k-1}, \hat{e}_k, e_{k+1}, \ldots, e_r) .$$

È possibile inoltre considerare una orientazione « indotta » dal simplesso τ^r su una sua faccia qualunque; tale orientazione viene definita convenendo che la orientazione della faccia (2) sia concorde o discorde con quella del simplesso (1) a seconda che k sia pari o dispari.

Ovviamente anche un unico punto può essere considerato come un simplesso a zero dimensioni, simplesso a cui può essere attribuita una orientazione arbitraria (da indicarsi ancora come positiva o negativa).

Infine ricordiamo che cosa si intende per « complesso simpliciale» ad r dimensioni: un insieme K di un numero finito di simplessi orientati, ad r dimensioni, due a due non intersecantisi. Allora è noto che è possibile definire i cosiddetti « coefficienti di incidenza » del complesso simpliciale nel modo seguente:

dati due simplessi τ^r e τ^{r-1} rispettivamente ad r e ad $(r-1)$ dimensioni appartenenti al dato complesso simpliciale K, si indica con $(\tau^r : \tau^{r-1})$

e si chiama coefficiente di incidenza un numero, che è uguale a 0, + 1, — 1; e precisamente si pone

$$(3) \qquad (\tau^r : \tau^{r-1}) = 0\,,$$

se il simplesso τ^{r-1} non è faccia del simplesso τ^r;

$$(4) \qquad (\tau^r : \tau^{r-1}) = \pm 1\,.$$

se il simplesso τ^{r-1} è faccia del simplesso τ^r assumendo il segno + se la orientazione indotta da τ^r su τ^{r-1} coincide con quella che è stata prefissata, il segno — nel caso contrario.

Per i coefficienti di incidenza ora richiamati valgono le proprietà fondamentali seguenti:

1) considerato il simplesso (1) definito dai vertici $e_0, e_1, \ldots e_r$ ed il simplesso (2), per le convenzioni poste si ha

$$(5) \qquad (\tau^r : \tau_k^{r-1}) = (-1)^k$$

2) fissato un simplesso τ^{r-2} appartenente al simplesso (1) e detti τ_i^{r-1} e τ_k^{r-1} due simplessi incidenti a τ^{r-2} e che siano entrambi faccie del simplesso (1) si ha

$$(6) \qquad (\tau^r : \tau_i^{r-1}) \cdot (\tau_i^{r-1} : \tau^{r-2}) + (\tau^r : \tau_k^{r-1}) \cdot (\tau_k^{r-1} : \tau^{r-2}) = 0.$$

Di conseguenza si può dimostrare che, comunque siano scelti due simplessi τ^r e τ^{r-2} appartenenti allo stesso complesso simpliciale, si ha

$$(7) \qquad \Sigma\,(\tau^r : \tau_i^{r-1}) \cdot (\tau_i^{r-1} : \tau^{r-2}) = 0$$

essendo la sommatoria estesa a tutti i simplessi ad $r - 1$ dimensioni appartenenti al complesso simpliciale.

Queste convenzioni e proprietà si estendono immediatamente anche ad un complesso simpliciale « curvo », cioè al complesso che si ottiene trasformando un complesso simpliciale mediante una trasformazione biunivoca e continua senza eccezioni che intercede tra lo spazio euclideo R_n in cui giace il dato complesso simpliciale e un altro spazio euclideo R_n'.

È noto infine come si giunge al concetto generale di « cella » di uno spazio euclideo ed al concetto di « complesso di celle ».

Si ottiene di poter definire il concetto di coefficienti di incidenza anche ai complessi di celle estendendo le convenzioni già poste.

Un particolare, indicate con t^r e t^{r-1} due celle ad r ed $r - 1$ dimensioni rispettivamente appartenenti al complesso, si pongono per i coefficienti di incidenza, definiti con procedimento analogo a quello tenuto per i simplessi, le note convenzioni:

$$(8) \qquad (-t^r : t^{r-1}) = (t^r : -t^{r+1}) = -(t^r : t^{r-1}) .$$

Si giunge così al concetto di a-complesso di celle; viene chiamato così un complesso per cui sia valida la relazione

$$(9) \qquad \sum_k (t^r : t_k^{r-1}) \cdot (t_k^{r-1} : t^{r-2}) = 0$$

essendo t^r e t^{r-2} due celle ad r ed $r-2$ dimensioni ed essendo la sommatoria estesa a tutte le celle ad $r-1$ dimensioni del complesso.

Nel seguito parleremo brevemente di « complesso » intendendo indicare un a-complesso, cioè un complesso di celle per cui valga la proprietà (9), salvo esplicito avviso contrario.

Si giunge immediatamente da ciò che precede al concetto di « matrici di incidenza » di un complesso. Fissate le celle di un complesso e le relative orientazioni, si ha che la k-esima matrice di incidenza E^k ($k = 0, 1, \ldots, r-1$) ha per elementi i coefficienti di incidenza; in altre parole l'elemento ε_{ij}^k della k-esima matrice di incidenza è dato da

$$(10) \qquad \varepsilon_{ij}^k = (t_i^{k+1} : t_j^k)$$

dove i e j descrivono gli insiemi degli indici delle celle a $(k+1)$ dimensioni e ad k dimensioni rispettivamente che compongono il complesso stesso.

La considerazione delle matrici di incidenza permette di determinare moltissime proprietà del complesso, e tra l'altro gli invarianti numerici fondamentali, la orientabilità ecc.

Da un certo punto di vista si potrebbe dire che la introduzione e l'uso sistematico delle matrici di incidenza per determinare le proprietà di un complesso costituisce l'inizio dell'uso di strumenti algebrici per lo studio di proprietà topologiche.

In questo ordine di idee si giunge alla immediata generalizzazione con il concetto di « catena », che introduce metodicamente nella topologia l'idea tipicamente algebrica di « gruppo ». Considerato un gruppo abeliano A che si conviene abitualmente di scrivere come un gruppo additivo, si associa ad ogni cella t^r r-dimensionale del complesso K un elemento $X^r(t^r)$ del gruppo con la condizione che si abbia

$$(11) \qquad X^r(-t^r) = -X^r(t^r) ;$$

si ottiene così una funzione definita sul complesso K ed avente come valori gli elementi del gruppo A; funzione che si chiama « catena » r-dimensionale del complesso K nel dominio dei coefficienti A.

Si suole anche convenire di scrivere la catena come una forma lineare nel modo seguente: indicato con a_i il valore che la catena assume in corrispondenza alla cella t_i^r, si pone

$$X^r = \Sigma\, a_i\, t_i \, . \tag{12}$$

Si ottiene così di poter associare al complesso K un gruppo abeliano L^r che viene chiamato il gruppo delle catene r-dimensionali sul complesso del dominio dei coefficienti.

Di conseguenza le proprietà del complesso possono venire espresse e studiate in termini algebrici attraverso le proprietà del gruppo L^r.

Tra le proprietà più notevoli ricordiamo quelle che hanno il loro fondamento nel concetto di « contorno » di una cella e nei concetti che ne derivano. Come è noto il contorno di una cella t^r viene indicato convenzionalmente con il simbolo ∂t^r e viene definito dalla formula seguente

$$\partial t^r = \sum_i (t^r : t_i^{r-1}) \cdot t_i^{r-1} \, . \tag{13}$$

Si ottiene di qui immediatamente la definizione del « contorno » della catena X^r, mediante la

$$\partial X_r = \Sigma\, a_i\, (t_i^r : t_j^{r-1})\, t_j^{r-1} \tag{14}$$

Poichè si ha ovviamente

$$\partial\,(X_1^r + X_2^r) = \partial X_1^r + \partial X_2^r, \tag{15}$$

il simbolo ∂ può essere considerato come un operatore che genera una corrispondenza univoca (un omomorfismo) tra gruppi e precisamente tra il gruppo delle catene r-dimensionali e quello delle catene $(r - 1)$ dimensionali.

Il nucleo di tale omomorfismo, cioè l'insieme delle catene r-dimensionali che vengono rappresentate sullo zero delle catene $(r - 1)$-dimensionali è un gruppo Z_r che viene chiamato il gruppo dei « cicli » r-dimensionali del complesso (sempre — beninteso — rispetto al dominio A dei coefficienti).

Se indichiamo con B_r l'immagine del gruppo L_{r+1} si ha immediatamente che B_r è un sottogruppo del gruppo L_r.

Si dimostra inoltre immediatamente che per l'operatore ∂ vale la relazione fondamentale

$$\delta\delta X^r = 0 \tag{16}$$

e pertanto il gruppo B_r risulta essere contenuto nel gruppo dei cicli r-dimensionali.

Come è noto, invece di dire che una catena X^r appartiene al gruppo B_r, si suol dire che essa è « omologa a zero » (rispetto al dominio dei coefficienti a) e si scrive

$$X^r \sim 0 . \tag{17}$$

Si introduce pertanto una relazione, che è quella di « omologia », per la quale si dimostra il sussistere delle tre classiche proprietà: riflessiva, simmetrica e transitiva che caratterizzano le relazioni di « equivalenza ».

Dalle relazioni gruppali precedenti si passa immediatamente alla considerazione del gruppo complementare

$$H_r = \frac{Z_r}{B_r} \tag{18}$$

che viene anche chiamato « gruppo di Betti » r-dimensionale (relativo al dominio dei coefficienti stabilito) del complesso. Gli elementi del gruppo H_r vengono chiamati anche « classi di omologia ».

Nel caso in cui il gruppo A dei coefficienti è il gruppo abeliano dei numeri interi (rispetto all'operazione di addizione) il rango del gruppo di Betti viene chiamato « numero di Betti » r-dimensionale. In questo caso gli elementi di ordine finito del gruppo di Betti dànno il cosidetto « gruppo della torsione r-dimensionale » del complesso.

Non possiamo ricordare tutte le feconde conseguenze che si possono trarre da questa impostazione formale dello studio delle proprietà topologiche; osserviamo a titolo di esempio che in essa si inquadra facilmente anche un altro concetto che scaturisce immediatamente dalle considerazioni svolte poco fa a proposito del « contorno » di una cella e di una catena. Si tratta del cosidetto « co-contorno » (o anche contorno superiore) che per una cella t^r viene indicato simbolicamente con δt^r e definito da

$$\delta t^r = \sum_j (t_j^{r+1} : t^r) \cdot t_j^{r+1} \tag{19}$$

e per la catena (12) viene definito da

$$\delta X^r = \sum_{ij} a_i (t_j^{r+1} : t_i^r) \cdot t_j^{r+1} . \tag{20}$$

Si dimostra che per l'operatore δ ora introdotto vale una proprietà formale analoga alla (16) e pertanto si giunge alla considerazione del concetto di « cociclo » e di « gruppo di coomologia».

Non è possibile entrare qui nei particolari in relazione alle moderne ricerche in questo campo; basti aver illustrato brevemente la fecondità dei concetti che sorgono dall'accoppiamento della Topologia che si potrebbe chiamare classica con i metodi formali dell'Algebra.

3. — Abbiamo brevemente richiamato i concetti di « gruppi di omologia » e di « classi di omologia ».

Ricordiamo poi brevemente che è possibile definire un altro concetto, quello di « classi di omotopia », che stabilisce una relazione tra enti topologici notevolmente più restrittiva della relazione che consiste nell'appartenere alla stessa classe di omologia.

Non essendo possibile dare qui una trattazione rigorosa, ci limitiamo a dire qualche parola a titolo di illustrazione.

Si pensi ad una varietà topologica ([2]) ed un suo punto x. Si pensi poi ad una curva regolare e senza punti doppi λ che si snodi nell'interno della varietà partendo da x e ritornando al punto stesso; si pensi poi ad una deformazione continua del circuito nell'interno della varietà, deformazione che mantenga fisso il punto x. Tutte le curve che si ottengono da λ attraverso una deformazione cosiffatta si dicono appartenere alla stessa « classe di omotopia » (relativa al punto x).

Per tali classi di omotopia si può definire una operazione di « composizione » che le assimila agli elementi di un gruppo (in generale non abeliano) che viene chiamato « gruppo fondamentale » o « gruppo di Poincaré » della varietà.

La considerazione di tale gruppo è di essenziale importanza per la determinazione della struttura topologica della varietà. Per dare un esempio mi limiterò a ricordare la varietà che si ottiene « tagliando » il piano proiettivo complesso lungo i punti di una curva algebrica f; la considerazione del gruppo di Poincaré di tale varietà è essenziale per la risoluzione della questione della esistenza di una funzione algebrica a più valori dei punti del piano, che ammetta la curva f come curva di diramazione.

Il concetto di « classi di omotopia » a cui appartengono le curve regolari immerse in una varietà e passanti per un punto x di questa viene immediatamente generalizzato al caso in cui invece di curve si tratti di varietà a dimensione superiore ad 1 immerse nella varietà data.

([2]) Il concetto di « varietà topologica » è qui supposto noto.

Anche in questi casi si possono definire le « classi di omotopia » e il « gruppo di omotopia ».

La loro considerazione è di essenziale importanza per la risoluzione di fondamentali problemi topologici, per es. quelli relativi a spazi fibrati, di cui parleremo tra poco.

4. — Un ulteriore esempio di intima compenetrazione tra metodi di carattere algebrico e Topologia è dato dalla teoria moderna degli spazi fibrati. La definizione di spazio fibrato B si può dare, come è noto, secondo STEENROD [3] facendo intervenire:

1) uno « spazio base » X;

2) uno « spazio fibra » Y;

3) una operazione univoca p (proiezione) che fa corrispondere ad un punto di B un punto dello spazio base X;

4) un gruppo G che operi effettivamente sugli elementi della fibra Y;

con le seguenti condizioni:

5) esista una famiglia di aperti V_j che ricopre completamente lo spazio base in modo che la corrispondenza Φ_j la quale opera tra l'insieme $p^{-1}(V_j)$ e l'insieme $V_j \times Y$, prodotto topologico di V_j e della fibra Y sia un omeomorfismo;

6) indicato con x un punto dello spazio base che appartiene contemporaneamente a due insiemi V_i e V_j la corrispondenza $\Phi_j^{-1}\Phi_i$ che muta in sè la fibra che si proietta in x appartenga al gruppo G.

Un esempio elementare di spazio fibrato è dato dalla quadrica rigata: per spazio base può essere presa una direttrice e le fibre sono rappresentate dalle generatrici. Altri esempi si possono dare in cui la fibra è rappresentata addirittura da un gruppo.

Tra i problemi fondamentali degli spazi fibrati ricorderemo quello della esistenza di una « sezione trasversale » (traduciamo così l'espressione inglese tecnica « cross section ») cioè di una rappresentazione dello spazio base X sullo spazio fibrato; per es. nel caso della quadrica è chiaro che una sezione trasversale è fornita da una qualunque retta che si appoggi a tutte le generatrici.

È di notevole interesse osservare che molti problemi di carattere topologico « in grande » si possono esprimere con concetti della teoria degli spazi fibrati e risolvere con i metodi della teoria stessa. In particolare per es. si possono dare delle condizioni necessarie per l'esistenza di una sezione trasversale che si rivelano di grande utilità nella pra-

(3) Rinunciamo ad esporre qui la definizione di EHRESMANN e FELDBAU.

tica e sono basati sull'esame dei gruppi di omotopia dello spazio base e della fibra.

Per es. il classico teorema che afferma la non esistenza di un campo di vettori tangenti regolare e non nullo in nessun punto di una sfera è un tipico risultato che può essere espresso nella teoria degli spazi fibrati: invero si può assumere come spazio base la sfera e come fibra relativa ad un punto lo spazio lineare dei vettori tangenti ivi alla sfera stessa. L'operazione di proiezione è quella che fa corrispondere ad un vettore tangente il punto in cui esso tocca la sfera e il gruppo G è quello delle trasformazioni lineari in sè dello spazio di vettori tangenti in un punto.

Ovviamente se fosse possibile assegnare una corrispondenza che ad ogni punto della sfera associasse un vettore tangente non nullo in modo regolare, sarebbe di conseguenza possibile eseguire una sezione trasversale sullo spazio fibrato corrispondente. L'applicazione dei criteri di non esistenza porta come conseguenza il classico teorema che abbiamo ricordato.

Rinunciamo qui al tentativo di esporre altri risultati per limitarci a ricordare che nell'esame dei problemi che riguardano l'esistenza o meno di sezioni trasversali possono essere usati in modo efficace ed insostituibile non soltanto gli strumenti dedotti dalla teoria della omotopia ma anche quelli forniti dalla teoria della coomologia che abbiamo ricordato più sopra.

5. — Non possiamo qui dare un'idea, anche monca ed approssimativa, dei collegamenti che queste teorie hanno con la teoria delle forme differenziali esterne, teoria che ormai si è costituita come un edificio imponente che illumina tanta parte della Geometria Algebrica e della Teoria dei gruppi continui.

I pochi cenni che abbiamo dato possono farci pensare che forse ci troviamo di fronte ad un fenomeno analogo a quello che seguì la invenzione della Geometria Analitica. Può darsi che come a suo tempo la introduzione dei metodi algebrici per lo studio delle questioni geometriche ha portato a progressi imponenti tanto della Geometria che dell'Algebra, anche l'introduzione di metodi di Algebra astratta in Topologia apra orizzonti nuovi ai domini di queste due scienze affascinanti.

1961
— STAMPERIA —
CESARE TAMBURINI
VIA PASCOLI, 55
— MILANO —